



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

El problema restringido de $2 + N$ cuerpos

Autor/es

MARTA ELVIRA REY

Director/es

VÍCTOR LANCHARES BARRASA

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



El problema restringido de 2 + N cuerpos, de MARTA ELVIRA REY
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

El problema restringido de $2 + N$ cuerpos

Realizado por:

Marta Elvira Rey

Tutelado por:

Víctor Lanchares Barrasa

Logroño, junio de 2020

Resumen

A lo largo de esta memoria estudiaremos las soluciones de equilibrio del problema restringido de $2 + N$ cuerpos. Este consiste en describir el movimiento de N cuerpos de masas comparables, y relativamente pequeñas, que están sometidos a la acción gravitatoria de otros dos cuerpos con masas mayores que se mueven en órbita circular.

Comenzaremos viendo el caso más sencillo: el problema restringido de tres cuerpos. Este problema ya fue estudiado por Joseph-Louis Lagrange, quien encontró 5 soluciones de equilibrio, que son los llamados puntos lagrangianos.

Más tarde, analizaremos las soluciones del problema restringido de $2 + 2$ cuerpos y su estabilidad. Y finalmente llegaremos al problema restringido de $2 + N$ cuerpos, en el que daremos un resultado sobre el total de soluciones de equilibrio denominadas colineales.

Abstract

In this Report we study the equilibrium solutions of the restricted problem of $2 + N$ bodies. It describes the motion of N infinitesimal masses under the gravitational influence of two primary bodies, which moves in a circular orbit.

We begin with the simplest case: the restricted three body problem. The early study of this problem goes back to Lagrange, who found 5 equilibrium positions called the Lagrangian points.

In the next chapter we analyze the equilibrium solutions of the restricted problem of $2+2$ bodies and their stability properties. Finally, in the last chapter, we deal with the restricted problem of $2+N$ bodies, where we give a result about the total number of the collinear equilibrium solutions.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. El problema restringido de tres cuerpos	3
2. El problema restringido de $2 + 2$ cuerpos	9
2.1. Soluciones de equilibrio colineales	12
2.2. Soluciones de equilibrio triangulares	14
2.3. Cálculo de las soluciones de equilibrio numéricamente	19
2.4. Estabilidad de las soluciones de equilibrio	21
3. El problema restringido de $2 + N$ cuerpos	33
3.1. Soluciones de equilibrio colineales	34
Conclusiones	41
Bibliografía	43

Capítulo 1

Introducción

La publicación en 1687 de los “Principia Mathematica” de Newton, en donde se enuncia la ley de la gravitación universal, da lugar a la aparición de una nueva disciplina: la Mecánica Celeste. Esta se ocupa de determinar cómo se mueven los cuerpos celestes en el espacio bajo las leyes de la mecánica newtoniana. Desde su aparición, una de las cuestiones relevantes era la referente a la estabilidad del sistema solar. ¿Seguirán los planetas en sus órbitas, escaparán o chocarán con el Sol? Para ello era necesario estudiar el movimiento relativo de n cuerpos que se atraen entre sí según la ley de la gravedad, lo que se conoce como problema de n cuerpos. Suponiendo que los cuerpos son esferas o masas puntuales, la formulación matemática del problema es relativamente simple.

Consideremos n partículas P_i con masas m_i , $i = 1, \dots, n$ en un sistema de referencia inercial, de manera que las coordenadas de cada partícula P_i vienen dadas por (x_i, y_i, z_i) . Si denotamos por r_{ij} a la distancia entre las partículas P_i , P_j , $i, j = 1, \dots, n$, las ecuaciones que determinan el movimiento (ver [1]) vienen dadas por

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^3}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

donde k está relacionada con la constante de gravitación universal. Por tanto, el problema se describe mediante $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las ecuaciones (1.1) pueden formularse de manera alternativa como un sistema de ecuaciones de primer orden. Con este fin, introducimos los momentos lineales de cada partícula

$$p_{xi} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad p_{yi} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad p_{zi} = m_i \frac{dz_i}{dt}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Definimos ahora la energía total del sistema como la suma de la energía cinética y la potencial.

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2}{2m_i} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (1.3)$$

Con esto, el sistema (1.1) se reduce a $6n$ ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{xi}}, & \frac{dp_{xi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{yi}}, & \frac{dp_{yi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{zi}}, & \frac{dp_{zi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

que son las llamadas ecuaciones de Hamilton, donde la energía H se conserva. Es decir, $dH/dt = 0$.

El caso más sencillo de este problema corresponde al caso de dos cuerpos. Fue el propio Newton el que resolvió geoméricamente el problema de dos cuerpos para dos esferas que se movían bajo su atracción mutua. Años más tarde, en 1790, Johan Bernoulli demostró que el movimiento de una partícula con respecto a la otra se describe mediante una sección cónica y, en 1734, su hermano Daniel Bernoulli ganó un premio de la Academia Francesa por su tratamiento analítico del problema de los dos cuerpos. Finalmente, en 1744 Euler resolvió con detalle el problema de los dos cuerpos [1].

Mientras tanto ya se estaba trabajando en el problema de tres cuerpos, impulsados por la necesidad de conocer el movimiento de la Luna para la navegación. Por tanto, toma gran importancia el problema de los tres cuerpos, que consiste en determinar, en cualquier instante, las posiciones y velocidades de tres cuerpos, de cualquier masa, sometidos a atracción gravitacional mutua y partiendo de unas posiciones y velocidades dadas.

Centrados en el sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna, las investigaciones de la búsqueda de soluciones se dividieron en dos direcciones: aquellas que se preocupaban de encontrar teoremas generales sobre el movimiento, y aquellas que buscaban buenas aproximaciones de las soluciones para un periodo de tiempo suficientemente largo. Newton fue el primero en tratar el problema y logró resultados en ambas de direcciones. Sin embargo los cálculos le causaron

grandes dificultades, y su cálculo para el movimiento de los ápsides lunares¹ le dio un valor que era aproximadamente la mitad del observado [1].

Así, mientras el problema de dos cuerpos, cuando estos son esferas, puede resolverse por medio de funciones elementales, el problema de tres cuerpos es un problema no lineal complicado y no existe un tipo similar de solución. En concreto, el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que hay que resolver sería el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{xi}}, & \frac{dp_{xi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{yi}}, & \frac{dp_{yi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{zi}}, & \frac{dp_{zi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.5)$$

donde $H = \sum_{i=1}^3 \frac{p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2}{2m_i} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$

Durante el siglo XVIII, el desarrollo de los métodos analíticos significó que la dinámica en general, y la mecánica celeste en particular, comenzaran a liberarse de las limitaciones de la geometría y con ello vino la imposibilidad de encontrar una solución en términos de funciones elementales. Es por ello que se puso todo el empeño en la búsqueda de soluciones aproximadas. Fue Clairaut, en 1744, el primero en dar una solución aproximada del problema lunar mediante el uso de series infinitas. Los métodos de Clairaut ganaron aceptación y credibilidad gracias a su predicción de la fecha del perihelio del cometa Halley en 1759, que fue exacto en un mes, dentro del margen de error que se había permitido [1].

Como alternativa a las series infinitas de Clairaut, Euler, en 1748, usa el método de variación de constantes para tratar las perturbaciones del problema planetario, entendidas estas como desviaciones de un problema de dos cuerpos. En 1753 publicó su primera teoría lunar y en 1772 la segunda, que contenía muchas características nuevas e importantes. En ella aparecía la primera formulación del problema restringido de tres cuerpos basado en un sistema de coordenadas rotante junto con soluciones particulares.

1.1. El problema restringido de tres cuerpos

El problema restringido de tres cuerpos es una simplificación del problema de tres cuerpos, cuando uno de ellos es pequeño comparado con los otros dos. El planteamiento sería el siguiente

¹En astronomía, un ápside es el punto de mayor o menor distancia dentro de una órbita elíptica a su centro de masas. La línea que une los dos puntos apsidales se llama línea de los ápsides.

Describir el movimiento de una masa infinitesimal sometida a la atracción gravitatoria de dos cuerpos principales o primarios, que se mueven en órbita circular, sin que ésta ejerza ninguna influencia en el movimiento de los primarios.

Además de sus características simplificadoras, con respecto al problema general de tres cuerpos, también proporciona una buena aproximación para situaciones físicas reales, como por ejemplo, en el problema de determinar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, dada la presencia del Sol. En lo que respecta a este problema, en 1836 Jacobi demostró que podría representarse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales de cuarto orden que admite una integral primera, denominada integral de Jacobi.

Veamos cómo son las ecuaciones para el problema restringido, para lo cual seguiremos la notación clásica. En concreto nosotros nos hemos basado en [1, 9]. Supongamos que M_1 y M_2 son las masas de los primarios, con $M_2 \leq M_1$ y $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$. Elijamos las unidades de longitud y de tiempo de modo que la distancia entre los primarios (a) y la constante gravitacional (k^2) sean iguales a uno. En estas unidades el periodo de la órbita circular de los primarios es 2π . En términos astronómicos, o de Mecánica Celeste, diremos que el movimiento medio², n , es 1. Denotemos las coordenadas de M_1 , M_2 y el cuerpo menor por (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) y (ξ, η, ζ) respectivamente. Entonces las distancias del cuerpo menor a los primarios vienen dadas por

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + (\zeta - \zeta_2)^2}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por tanto tenemos las siguientes ecuaciones del movimiento para el cuerpo menor

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(1 - \mu)\frac{\xi - \xi_1}{r_1^3} - \mu\frac{\xi - \xi_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(1 - \mu)\frac{\eta - \eta_1}{r_1^3} - \mu\frac{\eta - \eta_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(1 - \mu)\frac{\zeta - \zeta_1}{r_1^3} - \mu\frac{\zeta - \zeta_2}{r_2^3}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Suponiendo que los primarios se mueven en el plano xy , y teniendo en cuenta que los cuerpos se mueven con velocidad angular constante, podemos pasar de un sistema inercial a un sistema rotante, donde los primarios M_1 y M_2 se encuentren fijos (en el nuevo eje x) en $(\mu, 0, 0)$ y $(\mu - 1, 0, 0)$ respectivamente. Es decir, hacemos el cambio

²Suponiendo un movimiento uniforme, el movimiento medio es el ángulo girado por unidad de tiempo.

$$\begin{aligned}
\xi &= x \cos t - y \sin t, \\
\eta &= x \sin t + y \cos t, \\
\zeta &= z.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Derivando dos veces las ecuaciones (1.8) respecto al tiempo, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \cos t \left(-x - 2\frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \right) + \sin t \left(y - 2\frac{dx}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} \right), \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \sin t \left(-x - 2\frac{dy}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \right) + \cos t \left(-y + 2\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right), \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Ahora, sustituimos (1.8) y (1.9) en las ecuaciones (1.7). Tras una manipulación adecuada de las mismas se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= x - (1-\mu)\frac{x-\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-\mu+1}{r_2^3}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -(1-\mu)\frac{z}{r_1^3} - \mu\frac{z}{r_2^3},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

donde, ahora,

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}, \\
r_2 &= \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Observemos que, si inicialmente $z_0 = 0$, entonces $z(t) = 0 \forall t$, por lo que el plano $z = 0$ es invariante. Por tanto podemos considerar solo el sistema plano, es decir, los tres cuerpos se sitúan en el plano xy .

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= x - (1-\mu)\frac{x-\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-\mu+1}{r_2^3}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

El sistema admite una integral primera, una función que permanece constante a lo largo de las soluciones, que recibe el nombre de integral o constante de Jacobi. Para encontrar la integral jacobiana definimos

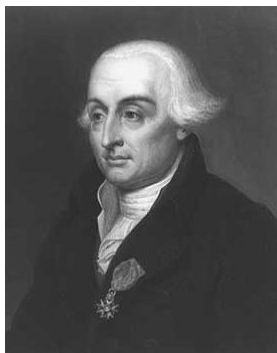


Figura 1.1: Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (1.13)$$

de manera que las ecuaciones (1.12) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si multiplicamos las ecuaciones (1.14) por $2\frac{dx}{dt}$ y $2\frac{dy}{dt}$ respectivamente y las sumamos, se obtiene

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{dy}{dt}\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (1.15)$$

Ahora, integramos respecto al tiempo la ecuación (1.15) y entonces

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2U - C, \quad (1.16)$$

donde C es una constante de integración, que es la integral de Jacobi. Es decir,

$$C = 2U - V^2, \quad (1.17)$$

donde V es el cuadrado de la velocidad de la masa infinitesimal.

El sistema (1.12) admite soluciones particulares. Las soluciones particulares son aquellas en las que la configuración geométrica de los tres cuerpos permanece invariable con respecto al tiempo, por tanto, son puntos de equilibrio del sistema y se obtienen cuando $U_x = U_y = 0$ en la ecuación (1.14).

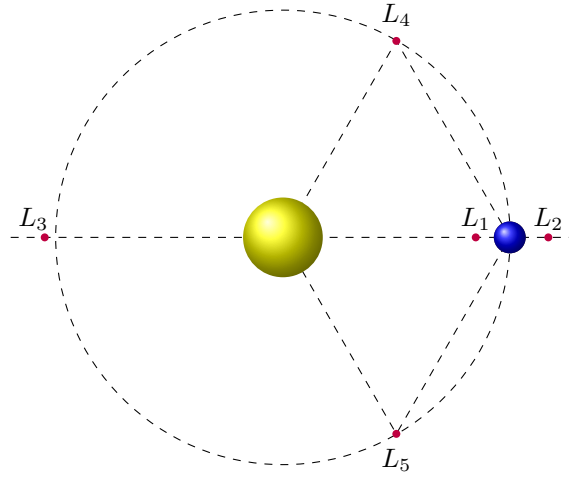


Figura 1.2: Puntos de Lagrange.

El primero en encontrar soluciones particulares fue Euler y después Lagrange obtuvo otras dos más. Las soluciones particulares encontradas por Euler son soluciones colineales, mientras que las encontradas por Lagrange son colineales y equiláteras, llamadas soluciones triangulares. En el caso colineal, todos los cuerpos se encuentran alineados y continúan en esa línea mientras la línea gira en un plano alrededor del centro de masas de los cuerpos. En el caso equilátero, las posiciones iniciales de los tres cuerpos están en los vértices de un triángulo equilátero y los cuerpos continúan en esa posición girando alrededor del centro de masas.

Joseph-Louis Lagrange (Figura 1.1) demostró la existencia de puntos de equilibrio en el sistema Sol-Júpiter, los llamados puntos de Lagrange ($L_1 - L_5$) [4]. Los tres primeros puntos de Lagrange son puntos colineales (L_1, L_2, L_3), mientras que los dos últimos son puntos equiláteros (L_4, L_5). Los puntos colineales son puntos inestables, en el sentido de que una pequeña perturbación puede hacer que el cuerpo menor se aleje, y los puntos equiláteros son puntos de equilibrio estables; un cuerpo que sufra una pequeña perturbación permanecerá en las proximidades de ese punto, realizando una especie de órbita alrededor del punto de Lagrange. En la Figura 1.2 se muestran las posiciones de los puntos de Lagrange con respecto a los dos primarios.

Por tanto, la conclusión de Lagrange fue que sería posible encontrar pequeños cuerpos celestes compartiendo la órbita de un planeta, bien adelantados 60° a la posición de éste o retrasados 60° respecto a él.

Durante muchos años los científicos apuntaron con sus telescopios hacia Júpiter para encontrar cuerpos en los puntos L_4 y L_5 , pero no encontraron nada. En el siglo XX los telescopios mejoraron y en 1906 el astrónomo alemán Maximilian Wolf descubrió un asteroide en L_4 , al que denominó Aquiles, por

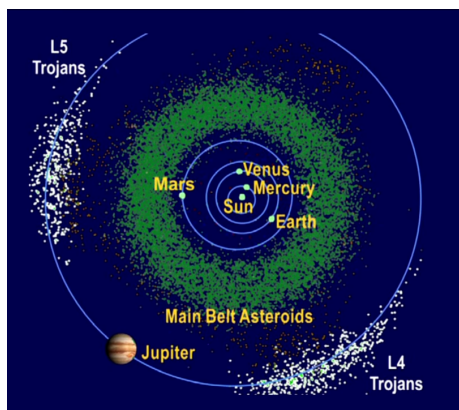


Figura 1.3: Asteroides troyanos de Júpiter.

el héroe griego de la *Iliada*. Más tarde el astrónomo August Kopff descubrió otro asteroide, pero esta vez en L_5 , y lo llamó Patroclo, otro de los griegos de la Guerra de Troya. En poco tiempo se fueron descubriendo muchos más asteroides en los puntos L_4 y L_5 y, para seguir con la tradición establecida por Wolf y Kopff, se les fue nombrando con personajes de la Guerra de Troya narrada por Homero en la *Iliada*. En conjunto se los denomina asteroides troyanos.

Los Troyanos de Júpiter están divididos en dos grupos: El Campamento Griego delante, y el Campamento Troyano detrás de Júpiter en sus respectivas órbitas, con las excepciones de Héctor que está en L_4 pero es troyano y Patroclo que se encuentra en L_5 pero es griego. En la Figura 1.3 vemos dónde se sitúan los asteroides troyanos de Júpiter en el sistema solar.

Posteriormente, se han descubierto asteroides troyanos en más planetas del sistema solar y el número de ellos que se conoce hasta la fecha para cada planeta es el siguiente (ver [7]):

- Tierra: 1.
- Marte: 9.
- Júpiter: 7311.
- Urano: 1.
- Neptuno: 24.

Como se han descubierto muchos asteroides troyanos alrededor de Júpiter parece interesante estudiar el problema de $2 + N$ cuerpos, es decir, lo que sucede cuando tenemos dos primarios y N cuerpos menores que se mueven bajo la fuerza gravitacional de los primarios. Nosotros nos ocuparemos de determinar las soluciones de equilibrio del problema restringido de $2 + N$ cuerpos, las mismas que estudiaron Euler y Lagrange para el problema restringido de tres cuerpos. En el siguiente capítulo calcularemos los puntos de equilibrio cuando hay $2 + 2$ cuerpos.

Capítulo 2

El problema restringido de $2 + 2$ cuerpos

Si queremos describir la dinámica de los asteroides troyanos, deberíamos generalizar el problema restringido de tres cuerpos a uno de $2 + N$ cuerpos. Dicha generalización aparece en el trabajo de Whipple y Szebehely de 1984 [9] en el que se describe el problema restringido de M primarios y N masas infinitesimales, prestando especial atención al problema restringido de $2 + N$ cuerpos. En este capítulo nos centraremos en el caso $N = 2$, el más sencillo después del problema restringido de tres cuerpos, y que es el modelo que usó Whipple [8] para estudiar la estabilidad de asteroides binarios.

Así, tenemos dos primarios que se mueven en órbita circular alrededor de su centro de masas, y dos cuerpos menores que se mueven en el campo gravitacional de los primarios (Figura 2.1). Los cuerpos menores se atraen mutuamente, pero no perturban el movimiento de los primarios. Sean M_1 y M_2 las masas de los primarios, con $M_2 \leq M_1$ y $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$, y m_1 y m_2 las masas de los cuerpos menores, con $m_1, m_2 \ll M_2$ y $\mu_i = m_i/(M_1 + M_2)$, para $i = 1, 2$. Como en el caso del problema restringido de tres cuerpos, en un sistema de coordenadas rotante y con unidades adecuadas, las coordenadas de los primarios son $(\mu, 0, 0)$ y $(\mu - 1, 0, 0)$ respectivamente. Definimos las distancias entre los demás cuerpos como

$$\begin{aligned} R_{1i}^2 &= (x_i - \mu)^2 + y_i^2 + z_i^2, & i = 1, 2, \\ R_{2i}^2 &= (x_i - \mu + 1)^2 + y_i^2 + z_i^2, & i = 1, 2, \\ r^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2$, denotan las coordenadas de los cuerpos menores 1 y 2 respectivamente. Por tanto, es fácil generalizar la ecuación (1.10) para obtener las ecuaciones diferenciales, en el sistema rotante, que describen el problema restringido de $2 + 2$ cuerpos

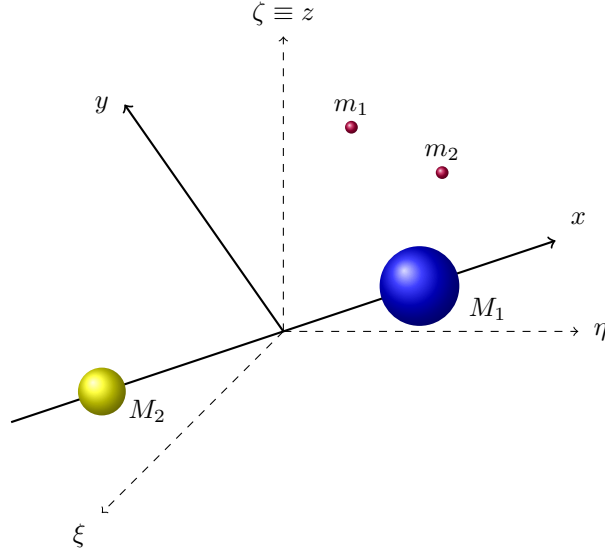


Figura 2.1: Problema restringido de 2 + 2 cuerpos.

$$\begin{cases} \mu_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} - 2 \frac{dy_i}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \mu_i \left(\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2 \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

donde

$$U = \sum_{i=1}^2 \mu_i \left(\frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1-\mu}{R_{1i}} + \frac{\mu}{R_{2i}} \right) + \frac{\mu_1 \mu_2}{r}.$$

Es interesante hacer notar que el primer sumatorio corresponde a la interacción de los cuerpos menores con los primarios, mientras que el segundo término describe la interacción entre los cuerpos menores. Los puntos de equilibrio de este sistema son aquellos puntos que satisfacen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dy_i}{dt} = \frac{dz_i}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

y, por tanto, se tiene que cumplir

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Existen al menos 14 soluciones de equilibrio diferentes para este sistema. Si evaluamos las derivadas parciales en (2.4) obtenemos las ecuaciones que definen las ubicaciones de las soluciones de equilibrio

$$x_1 - \frac{(1-\mu)(x_1-\mu)}{R_{11}^3} - \frac{\mu(x_1-\mu+1)}{R_{21}^3} - \frac{\mu_2(x_1-x_2)}{r^3} = 0, \quad (2.5a)$$

$$y_1 - \frac{(1-\mu)y_1}{R_{11}^3} - \frac{\mu y_1}{R_{21}^3} - \frac{\mu_2(y_1-y_2)}{r^3} = 0, \quad (2.5b)$$

$$- \frac{(1-\mu)z_1}{R_{11}^3} - \frac{\mu z_1}{R_{21}^3} - \frac{\mu_2(z_1-z_2)}{r^3} = 0, \quad (2.5c)$$

$$x_2 - \frac{(1-\mu)(x_2-\mu)}{R_{12}^3} - \frac{\mu(x_2-\mu+1)}{R_{22}^3} - \frac{\mu_1(x_2-x_1)}{r^3} = 0, \quad (2.5d)$$

$$y_2 - \frac{(1-\mu)y_2}{R_{12}^3} - \frac{\mu y_2}{R_{22}^3} - \frac{\mu_2(y_2-y_1)}{r^3} = 0, \quad (2.5e)$$

$$- \frac{(1-\mu)z_2}{R_{12}^3} - \frac{\mu z_2}{R_{22}^3} - \frac{\mu_1(z_2-z_1)}{r^3} = 0. \quad (2.5f)$$

Si despejamos z_2 de la ecuación (2.5c)

$$z_2 = z_1 \left(1 + \frac{r^3}{\mu_2} \left(\frac{1-\mu}{R_{11}^3} + \frac{\mu}{R_{21}^3} \right) \right), \quad (2.6)$$

y sustituimos en la ecuación (2.5f), resulta

$$- z_1 \left[\frac{r^3}{\mu_2} \left(\frac{1-\mu}{R_{11}^3} + \frac{\mu}{R_{21}^3} \right) \left(\frac{1-\mu}{R_{12}^3} + \frac{\mu}{R_{22}^3} + \frac{\mu_1}{r^3} \right) + \frac{1-\mu}{R_{12}^3} + \frac{\mu}{R_{22}^3} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Puesto que la expresión en el interior de los corchetes es estrictamente positiva, se deduce que $z_1 = 0$. En consecuencia, de la ecuación (2.6) obtenemos que $z_2 = 0$. Por tanto, todas las soluciones de equilibrio se encuentran en el plano de los primarios, igual que en el problema restringido de tres cuerpos.

Veamos dónde se encuentran estos puntos de equilibrio en relación con los cinco puntos lagrangianos. Dado que el problema se puede restringir al plano, definimos la siguiente función

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2}, \quad (2.8)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1^2 &= (x-\mu)^2 + y^2, \\ R_2^2 &= (x-\mu+1)^2 + y^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Esta función Ω es la que aparece en (1.13) y es la correspondiente función U en el problema restringido de tres cuerpos. Si en este problema despreciáramos

la interacción mutua entre μ_1 y μ_2 , tendríamos dos problemas independientes restringidos de tres cuerpos, uno para cada masa. Puesto que esta interacción va a ser pequeña, cabe esperar que nuestro problema se parezca mucho a esto, es decir, a dos problemas independientes. De esto deducimos que las soluciones de equilibrio que obtengamos tienen que estar en las proximidades de los puntos L_i . Haciendo uso de la función $\Omega(x, y)$, podemos escribir las ecuaciones (2.5) de la siguiente manera

$$\Omega_x(x_1, y_1) - \frac{\mu_2(x_1 - x_2)}{r^3} = 0, \quad (2.10a)$$

$$\Omega_y(x_1, y_1) - \frac{\mu_2(y_1 - y_2)}{r^3} = 0, \quad (2.10b)$$

$$\Omega_x(x_2, y_2) - \frac{\mu_1(x_2 - x_1)}{r^3} = 0, \quad (2.10c)$$

$$\Omega_y(x_2, y_2) - \frac{\mu_1(y_2 - y_1)}{r^3} = 0. \quad (2.10d)$$

Las ecuaciones (2.10) implican

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_x(x_1, y_1)}{\mu_2} &= -\frac{\Omega_x(x_2, y_2)}{\mu_1}, \\ \frac{\Omega_y(x_1, y_1)}{\mu_2} &= -\frac{\Omega_y(x_2, y_2)}{\mu_1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por tanto, las soluciones de equilibrio del problema se encuentran en regiones donde Ω_x y Ω_y cambian de signo. Ahora bien, $\Omega_x = \Omega_y = 0$ justamente en los cinco puntos lagrangianos. Por tanto, las soluciones de equilibrio que calcularemos a continuación, para el problema restringido de 2+2 cuerpos, se encuentran en las proximidades de éstos, como ya habíamos indicado, pero puede haber más.

Diferenciaremos dos tipos de soluciones de equilibrio, las situadas cerca de los puntos colineales de Lagrange (L_1 , L_2 y L_3) y las situadas cerca de los puntos triangulares (L_4 y L_5).

2.1. Soluciones de equilibrio colineales

Los puntos colineales de Lagrange se sitúan en los puntos $(L_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$. Si nos fijamos en las ecuaciones (2.5b) y (2.5e) vemos que se satisfacen cuando $y_1 = y_2 = 0$, respectivamente. Nos falta determinar x_1 y x_2 de manera que se cumplan las ecuaciones (2.5a) y (2.5d). Sustituyendo $y_1 = y_2 = 0$ en las ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{(1-\mu)(x_1-\mu)}{|x_1-\mu|^3} - \frac{\mu(x_1-\mu+1)}{|x_1-\mu+1|^3} - \frac{\mu_2(x_1-x_2)}{|x_1-x_2|^3} &= 0, \\ x_2 - \frac{(1-\mu)(x_2-\mu)}{|x_2-\mu|^3} - \frac{\mu(x_2-\mu+1)}{|x_2-\mu+1|^3} - \frac{\mu_1(x_2-x_1)}{|x_2-x_1|^3} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dado que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, las soluciones de las ecuaciones (2.12) pueden expresarse mediante series de potencias

$$x_1 = L_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \varepsilon_2^j, \quad x_2 = L_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \varepsilon_1^j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

donde

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_i}{(\mu_1 + \mu_2)^{2/3}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Hasta la primera potencia de ε , con $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, se tiene

$$x_1 = L_i + a_{11} \varepsilon_2, \quad x_2 = L_i + a_{21} \varepsilon_1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.12) pueden escribirse como (2.10a) y (2.10c). Si convenimos que el superíndice “o” denota la evaluación en los puntos lagrangianos, entonces, haciendo el desarrollo en serie de Taylor de primer orden en $(L_i, 0)$ y aplicando que $\Omega_x^o = 0$ se tiene

$$a_{11} \Omega_{xx}^o \varepsilon_2 - \frac{\mu_2(x_1 - x_2)}{|x_1 - x_2|^3} = 0, \quad (2.16a)$$

$$a_{21} \Omega_{xx}^o \varepsilon_1 - \frac{\mu_1(x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^3} = 0, \quad (2.16b)$$

siendo

$$\Omega_{xx}^o = 1 + \frac{2(1-\mu)}{|L_i - \mu|^3} + \frac{2\mu}{|L_i - \mu + 1|^3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Combinando las ecuaciones (2.16) obtenemos

$$(\mu_1 a_{11} \varepsilon_2 + \mu_2 a_{21} \varepsilon_1) \Omega_{xx}^o = 0. \quad (2.18)$$

Dado que $\mu_1 \varepsilon_2 = \mu_2 \varepsilon_1$ y $\Omega_{xx}^o \neq 0$, entonces la ecuación (2.18) implica que $a_{21} = -a_{11}$. Por tanto, hasta primer orden en ε , el centro de masas de m_1 y m_2

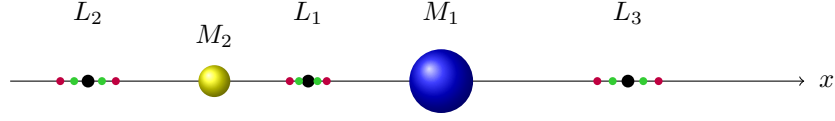


Figura 2.2: Ubicación de las soluciones de equilibrio colineales para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$. El círculo verde denota m_1 y el morado denota m_2 .

se encuentra en el punto lagrangiano $(L_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (2.16a) se puede escribir de la siguiente manera

$$a_{11}\Omega_{xx}^\circ\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2 a_{11}}{|a_{11}|^3} = 0. \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) tiene dos soluciones

$$a_{11} = \frac{\pm 1}{(\Omega_{xx}^\circ)^{1/3}}, \quad (2.20)$$

y, en consecuencia,

$$a_{21} = \frac{\mp 1}{(\Omega_{xx}^\circ)^{1/3}}. \quad (2.21)$$

Por tanto, hasta primer orden en ε , existen dos soluciones de equilibrio cerca de cada punto colineal de Lagrange (Figura 2.2). Es decir, en total hay 6 soluciones de equilibrio colineales, cuyas coordenadas son

$$\begin{aligned} x_1 &= L_i \pm \frac{\mu_2}{((\mu_1 + \mu_2)^2 \Omega_{xx}^\circ)^{1/3}}, & y_1 &= 0, \\ x_2 &= L_i \pm \frac{-\mu_1}{((\mu_1 + \mu_2)^2 \Omega_{xx}^\circ)^{1/3}}, & y_2 &= 0, \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

2.2. Soluciones de equilibrio triangulares

Los puntos triangulares de Lagrange se sitúan en los puntos $(\mu - \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$. Como en la sección 2.1, las soluciones de las ecuaciones (2.5), con $z_1 = z_2 = 0$, pueden expresarse mediante series de potencias

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu - \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \varepsilon_2^j, & y_1 &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{1j} \varepsilon_2^j, \\ x_2 &= \mu - \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \varepsilon_1^j, & y_2 &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j} \varepsilon_1^j, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_i}{(\mu_1 + \mu_2)^{2/3}}, \quad i = 1, 2. \quad (2.24)$$

Hasta primer orden en ε , con $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, se tiene

$$x_i = \mu - \frac{1}{2} + a_{i1}\varepsilon_{3-i}, \quad y_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + b_{i1}\varepsilon_{3-i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

Sustituyendo en (2.10), y haciendo el desarrollo en serie de Taylor de primer orden en $(\mu - 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ y aplicando que $\Omega_x^\circ = \Omega_y^\circ = 0$ se tiene

$$(a_{11}\Omega_{xx}^\circ + b_{11}\Omega_{xy}^\circ)\varepsilon_2 - \frac{\mu_2(x_1 - x_2)}{r^3} = 0, \quad (2.26a)$$

$$(a_{11}\Omega_{xy}^\circ + b_{11}\Omega_{yy}^\circ)\varepsilon_2 - \frac{\mu_2(y_1 - y_2)}{r^3} = 0, \quad (2.26b)$$

$$(a_{21}\Omega_{xx}^\circ + b_{21}\Omega_{xy}^\circ)\varepsilon_1 - \frac{\mu_1(x_2 - x_1)}{r^3} = 0, \quad (2.26c)$$

$$(a_{21}\Omega_{xy}^\circ + b_{21}\Omega_{yy}^\circ)\varepsilon_1 - \frac{\mu_1(y_2 - y_1)}{r^3} = 0. \quad (2.26d)$$

Combinando la ecuación (2.26a) con (2.26c) y la ecuación (2.26b) con (2.26d) obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_1\varepsilon_2(a_{11}\Omega_{xx}^\circ + b_{11}\Omega_{xy}^\circ) + \mu_2\varepsilon_1(a_{21}\Omega_{xx}^\circ + b_{21}\Omega_{xy}^\circ) &= 0, \\ \mu_1\varepsilon_2(a_{11}\Omega_{xy}^\circ + b_{11}\Omega_{yy}^\circ) + \mu_2\varepsilon_1(a_{21}\Omega_{xy}^\circ + b_{21}\Omega_{yy}^\circ) &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como $\mu_1\varepsilon_2 = \mu_2\varepsilon_1$, entonces

$$\begin{aligned} a_{11}\Omega_{xx}^\circ + b_{11}\Omega_{xy}^\circ + a_{21}\Omega_{xx}^\circ + b_{21}\Omega_{xy}^\circ &= 0, \\ a_{11}\Omega_{xy}^\circ + b_{11}\Omega_{yy}^\circ + a_{21}\Omega_{xy}^\circ + b_{21}\Omega_{yy}^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Manipulando adecuadamente las ecuaciones (2.28) se llega a

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21})(\Omega_{xx}^\circ\Omega_{yy}^\circ - (\Omega_{xy}^\circ)^2) &= 0, \\ (b_{11} + b_{21})(\Omega_{xx}^\circ\Omega_{yy}^\circ - (\Omega_{xy}^\circ)^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dado que $\Omega_{xx}^\circ\Omega_{yy}^\circ - (\Omega_{xy}^\circ)^2 \neq 0$, entonces las ecuaciones (2.29) implican que $a_{21} = -a_{11}$ y $b_{21} = -b_{11}$. Por tanto, hasta primer orden en ε , el centro de masas de m_1 y m_2 se encuentra en el punto triangular lagrangiano. Teniendo

esto en cuenta, así como la definición de ε_i dada por la ecuación (2.24), las ecuaciones (2.26a) y (2.26b) se pueden escribir de la siguiente manera

$$(a_{11}\Omega_{xx}^\circ + b_{11}\Omega_{xy}^\circ)\varepsilon_2 - \frac{a_{11}\varepsilon_2}{(a_{11}^2 + b_{11}^2)^{3/2}} = 0, \quad (2.30a)$$

$$(a_{11}\Omega_{xy}^\circ + b_{11}\Omega_{yy}^\circ)\varepsilon_2 - \frac{b_{11}\varepsilon_2}{(a_{11}^2 + b_{11}^2)^{3/2}} = 0. \quad (2.30b)$$

Combinando las ecuaciones (2.30) se obtiene

$$a_{11}^2 + \frac{\Omega_{yy}^\circ - \Omega_{xx}^\circ}{\Omega_{xy}^\circ} a_{11} b_{11} - b_{11}^2 = 0. \quad (2.31)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado (2.31), podemos expresar a_{11} en función de b_{11}

$$a_{11} = \alpha_i b_{11}, \quad i = 1, 2, \quad (2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Omega_{xx}^\circ - \Omega_{yy}^\circ + \sqrt{(\Omega_{xx}^\circ - \Omega_{yy}^\circ)^2 + 4(\Omega_{xy}^\circ)^2}}{2\Omega_{xy}^\circ}, \\ \alpha_2 &= \frac{\Omega_{xx}^\circ - \Omega_{yy}^\circ - \sqrt{(\Omega_{xx}^\circ - \Omega_{yy}^\circ)^2 + 4(\Omega_{xy}^\circ)^2}}{2\Omega_{xy}^\circ}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.32) en la ecuación (2.30b), obtenemos las ecuaciones

$$(\Omega_{xy}^\circ \alpha_i + \Omega_{yy}^\circ) b_{11} \varepsilon_2 - \frac{b_{11} \varepsilon_2}{(1 + \alpha_i^2)^{3/2} |b_{11}|^3} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.34)$$

Las raíces de la ecuación (2.34) dan lugar a cuatro soluciones para b_{11} que vienen dadas por

$$b_{11} = \frac{\pm 1}{(\Omega_{xy}^\circ \alpha_i + \Omega_{yy}^\circ)^{1/3} (1 + \alpha_i^2)^{1/2}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.35)$$

y, usando (2.32), se tiene:

$$\begin{aligned} a_{j1} &= \frac{\pm \alpha_i (-1)^{j+1}}{(\Omega_{xy}^\circ \alpha_i + \Omega_{yy}^\circ)^{1/3} (1 + \alpha_i^2)^{1/2}}, \\ b_{j1} &= \frac{\pm (-1)^{j+1}}{(\Omega_{xy}^\circ \alpha_i + \Omega_{yy}^\circ)^{1/3} (1 + \alpha_i^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2. \quad (2.36)$$

Para L_4 y L_5 se tiene que

$$\Omega_{xx}^\circ = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{xy}^\circ = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} \right), \quad \Omega_{yy}^\circ = \frac{9}{4}, \quad (2.37)$$

donde el signo $+$ corresponde a L_4 y el $-$ a L_5 . De este modo, obtenemos

$$\alpha_{1,2;L_4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12 \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2}}{2\sqrt{3} \left(\mu - \frac{1}{2} \right)} = -\alpha_{1,2;L_5}, \quad (2.38)$$

de manera que $\alpha_i \Omega_{xy}^\circ$ es igual para L_4 y L_5 . Es decir, los coeficientes b_{11} son los mismos en los dos puntos lagrangianos. Esto no es ninguna sorpresa, ya que, según se desprende de las ecuaciones (2.10), los puntos de equilibrio presentan simetría respecto al eje x . De hecho, si (x_1, y_1, x_2, y_2) es una solución de (2.10), también lo es $(x_1, -y_1, x_2, -y_2)$.

En total aparecen 8 soluciones de equilibrio, 4 en torno a L_4 dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu - \frac{1}{2} + \alpha_{1,2;L_4} b_{11} \varepsilon_2, & y_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + b_{11} \varepsilon_2, \\ x_2 &= \mu - \frac{1}{2} - \alpha_{1,2;L_4} b_{11} \varepsilon_1, & y_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - b_{11} \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde b_{11} viene dado por (2.35), y otras cuatro en torno a L_5 , simétricas de las anteriores

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu - \frac{1}{2} - \alpha_{1,2;L_4} b_{11} \varepsilon_2, & y_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + b_{11} \varepsilon_2, \\ x_2 &= \mu - \frac{1}{2} + \alpha_{1,2;L_4} b_{11} \varepsilon_1, & y_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - b_{11} \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nótese que, tanto en L_4 como en L_5 , se tiene que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (\Omega_{xy}^\circ \alpha_2 + \Omega_{yy}^\circ) = 0, \quad (2.41)$$

y habría una singularidad cuando $\mu = 0$. Este caso límite implicaría también $\mu_1 = \mu_2 = 0$, lo que invalidaría el supuesto de un problema restringido de $2 + 2$ cuerpos. Como ejemplo, tomamos el caso en que $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$. Las soluciones que encontramos, a partir de las ecuaciones (2.39) y (2.40), aparecen recogidas en la Tabla 2.1¹ y representadas gráficamente en la Figura 2.3.

Como se ve en la Figura 2.3, se pueden distinguir dos clases de soluciones de equilibrio triangulares, las situadas a lo largo de una línea recta que une el

¹Comparar con las soluciones dadas en la Tabla 2.2.

Soluciones en torno a L_4			
x_1	y_1	x_2	y_2
-0.081971	0.902917	-0.436057	0.792242
-0.176961	0.792315	-0.246079	1.013450
-0.223039	0.939736	-0.153921	0.718605
-0.318029	0.829134	0.035067	0.939809
Soluciones en torno a L_5			
x_1	y_1	x_2	y_2
-0.081971	-0.902917	-0.436057	-0.792242
-0.176961	-0.792315	-0.246079	-1.013450
-0.223039	-0.939736	-0.153921	-0.718605
-0.318029	-0.829134	0.035067	-0.939809

Tabla 2.1: Soluciones en torno a L_4 y L_5 obtenidas por desarrollos en serie para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

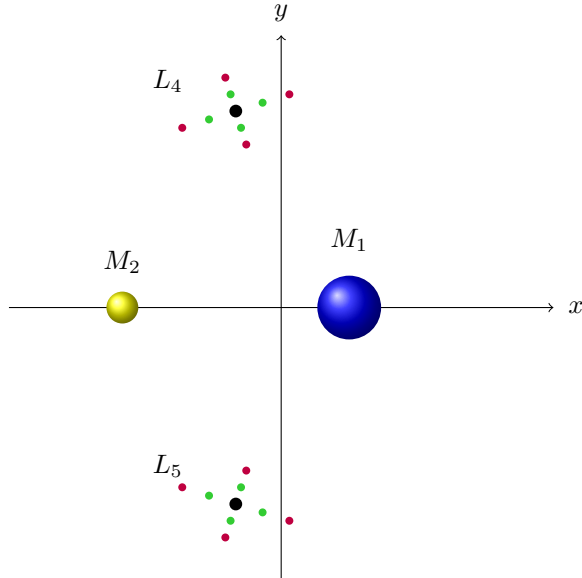


Figura 2.3: Ubicación de las soluciones de equilibrio triangulares para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$. El círculo verde denota m_1 y el morado denota m_2 .

punto triangular de Lagrange y el centro de masas de los primarios, a las que llamaremos soluciones de equilibrio triangulares en línea, y las situadas en una línea perpendicular a la anterior, las llamaremos soluciones de equilibrio triangulares perpendiculares. Por tanto, cerca de cada punto triangular de Lagrange existen 4 soluciones triangulares, es decir, en total hay 8 soluciones de equilibrio triangulares.

2.3. Cálculo de las soluciones de equilibrio numéricamente

Las soluciones discutidas hasta ahora son aquellas en la que las dos masas infinitesimales están próximas al mismo punto lagrangiano, lo cual no quiere decir que no haya más. De hecho, parece razonable que exista al menos una solución de equilibrio cuando una de las masas está en un entorno de un punto lagrangiano y la otra en un entorno de otro diferente. Es más, estas soluciones son bastante posibles, siempre que el término que acopla la interacción entre las dos masas infinitesimales pueda despreciarse, al ser la distancia entre ellas suficientemente grande. En este sentido, a las soluciones obtenidas habría que añadir 6 soluciones colineales más, que son las formas de colocar las dos masas, teniendo en cuenta el orden, en tres posiciones diferentes sin que se repitan las posiciones. Tendríamos también 12 combinaciones con una masa cerca de un punto colineal y la otra en las proximidades de uno triangular. Por último habría otras dos posiciones de equilibrio cuando una masa está cerca de L_4 y la otra de L_5 . Es decir, a las 14 soluciones ya calculadas, habría que añadir estas 20 soluciones que parece razonable que existan, haciendo un total de 34 equilibrios.

No vamos a proceder como antes y lo vamos a hacer numéricamente, usando la función FindRoot de Mathematica con una precisión suficientemente buena, ajustada a los valores de las masas infinitesimales. En concreto, hemos trabajado con 40 cifras significativas de precisión, ya que, en algunos casos, hemos tomado valores de μ_1 y μ_2 del orden de 10^{-16} , por lo que trabajar con la precisión estándar de 8 cifras significativas o 16 en el caso de doble precisión no tendría sentido. También hay que prestar atención a la convergencia del método, eliminando aquellas soluciones para las que no podamos garantizar una convergencia a la raíz buscada. En este sentido, se han tenido en cuenta los códigos de alerta que proporciona Mathematica para advertir de un fallo de precisión o de convergencia. Por otra parte, la búsqueda de raíces se ha hecho en función de lo que se espera encontrar, es decir, tomando condiciones iniciales, de manera aleatoria, en los entornos de los puntos lagrangianos. No obstante, para ver si el número de soluciones es mayor, también se ha hecho una búsqueda completamente aleatoria en un dominio rectangular que contiene a los 5 puntos de Lagrange. A continuación podemos ver parte del código implementado para la obtención de los equilibrios, en la que se buscan soluciones de un tipo particular.

Puntos de equilibrio del problema restringido de $2 + 2$ cuerpos.

Introducimos el potencial U y la función auxiliar Ω .

```
R1[x_, y_] := Sqrt[(x - Mu)^2 + y^2];
R2[x_, y_] := Sqrt[(x - Mu + 1)^2 + y^2];
Omega[x_, y_] := 1/2 (x^2 + y^2) + (1 - Mu)/R1[x, y] + Mu/R2[x, y];
r := Sqrt[(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2];
U = mu1 Omega[x1, y1] + mu2 Omega[x2, y2] + mu1 mu2/r
```

Definimos las ecuaciones.

```
eqs = {D[U, x1], D[U, x2], D[U, y1], D[U, y2]} // Simplify
```

Valores aproximados para los troyanos de Júpiter

```
m2 = 10^(-16);
m1 = 10^(-15) - m2;
m = 10^(-6);
```

Puntos de equilibrio cerca de los triangulares.

```
equilibrios1 = {x1, y1, x2, y2} /.
  FindRoot[
    eqs /. {Mu -> m, mu1 -> m1, mu2 -> m2},
    {{x1, RandomReal[{-48/100, -51/100}, WorkingPrecision -> 40]},
     {x2, RandomReal[{-48/100, -51/100}, WorkingPrecision -> 40]},
     {y1, RandomReal[{-85/100, -87/1000}, WorkingPrecision -> 40]},
     {y2, RandomReal[{-85/100, -87/1000}, WorkingPrecision -> 40]}},
    MaxIterations -> 500, AccuracyGoal -> 40,
    WorkingPrecision -> 40]

{-0.4999659332711250267142617865196593417971,
 -0.8660444940084903266314412025393186955330,
 -0.5006265070509873600548649443248609045267,
 -0.8656628095350022605917323465380812617018}
```

Tras este proceso hemos obtenido las 34 soluciones de equilibrio esperadas, cuyas coordenadas, para los valores $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$, se muestran en las Tablas 2.2. En la tabla (a) se encuentran las soluciones en las que las dos masas están en un entorno del mismo punto lagrangiano, separadas en colineales y triangulares (son las que anteriormente hemos aproximado mediante desarrollos en serie). En la tabla (b) están las otras soluciones colineales y en la (c) el resto de soluciones, donde están por un lado las que corresponden a una masa en un punto colineal y la otra en uno triangular y las dos últimas que corresponden a cada una de las masas en uno de los puntos triangulares.

Las soluciones de estas tres tablas están representadas en las Figuras 2.4, 2.5 y 2.6, respectivamente, donde cada equilibrio está representado por un color diferente. En las Figuras 2.7 y 2.8 se muestran las soluciones de las Figuras 2.5 y 2.6, respectivamente, ampliando cada punto de Lagrange para apreciar con

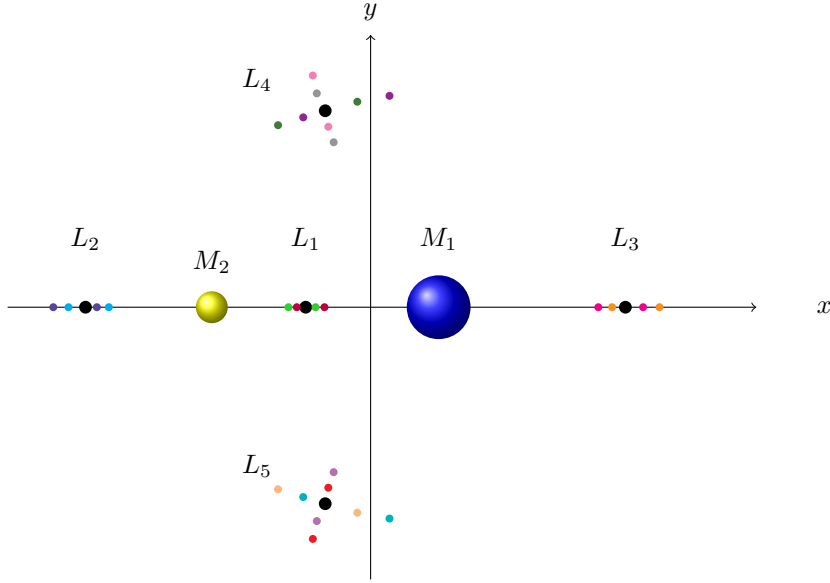


Figura 2.4: Soluciones de equilibrio cercanas a los puntos de Lagrange para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

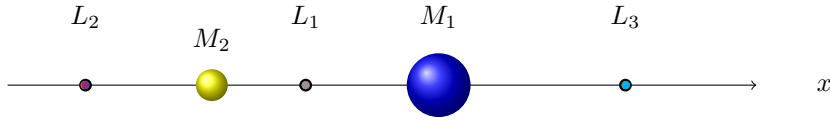


Figura 2.5: Soluciones de equilibrio colineales con las masas m_1 y m_2 en otras posiciones para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

más claridad la ubicación de las soluciones de equilibrio.

En el siguiente capítulo probaremos que el número de soluciones colineales es igual a $\frac{1}{2}(n+2)!$, de las cuales $3n!$ se encuentran en el entorno del mismo punto lagrangiano.

2.4. Estabilidad de las soluciones de equilibrio

Una vez que hemos determinado las soluciones de equilibrio es importante estudiar su estabilidad. En realidad solo las soluciones estables son interesantes, ya que son las que podríamos encontrarnos en la realidad. El tipo de estabilidad que estudiaremos en esta sección es la de Lyapunov [5].

Definición 1. Decimos que una solución de equilibrio x^* del sistema de ecuaciones diferenciales $x' = f(x)$ es estable en el sentido de Lyapunov si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si una solución, $x(t)$, verifica $|x(t_0) - x^*| < \delta$ entonces $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

x_1	y_1	x_2	y_2		x_1	y_1	x_2	y_2
-1.3316	0.0000	-1.1539	0.0000					
-1.2066	0.0000	-1.3987	0.0000					
-0.3253	0.0000	-0.2033	0.0000					
-0.2427	0.0000	-0.3623	0.0000					
1.0656	0.0000	1.2736	0.0000					
1.2012	0.0000	1.0038	0.0000					
-0.0586	0.9058	-0.4081	0.8023					
-0.0586	-0.9058	-0.4081	-0.8023					
-0.1865	0.7956	-0.2546	1.0213		-1.2589	0.0000	-0.2848	0.0000
-0.1865	-0.7956	-0.2546	-1.0213		-1.2571	0.0000	1.1242	0.0000
-0.2371	0.9426	-0.1628	0.7270		-0.2864	0.0000	1.1260	0.0000
-0.2371	-0.9426	-0.1628	-0.7270		-0.2855	0.0000	-1.2611	0.0000
-0.2970	0.8368	0.0833	0.9317		1.1237	0.0000	-1.2575	0.0000
-0.2970	-0.8368	0.0833	-0.9317		1.1246	0.0000	-0.2867	0.0000

(a) Soluciones cercanas a L_i .

(b) Otras soluciones colineales.

x_1	y_1	x_2	y_2
-1.2576	-0.0036	-0.1844	-0.8725
-1.2576	0.0036	-0.1844	0.8725
-0.2862	-0.0019	-0.1860	-0.8805
-0.2862	0.0019	-0.1860	0.8805
-0.2046	-0.8659	1.1249	-0.0146
-0.2046	0.8659	1.1249	0.0146
-0.1930	-0.8734	-0.2863	-0.0039
-0.1930	0.8734	-0.2863	0.0039
-0.1921	-0.8693	-1.2584	-0.0074
-0.1921	0.8693	-1.2584	0.0074
1.1241	-0.0072	-0.2090	-0.8659
1.1241	0.0072	-0.2090	0.8659
-0.1988	-0.8678	-0.1976	0.8695
-0.1988	0.8678	-0.1976	-0.8695

(c) Otras soluciones.

Tabla 2.2: Clasificación de las soluciones de equilibrio para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

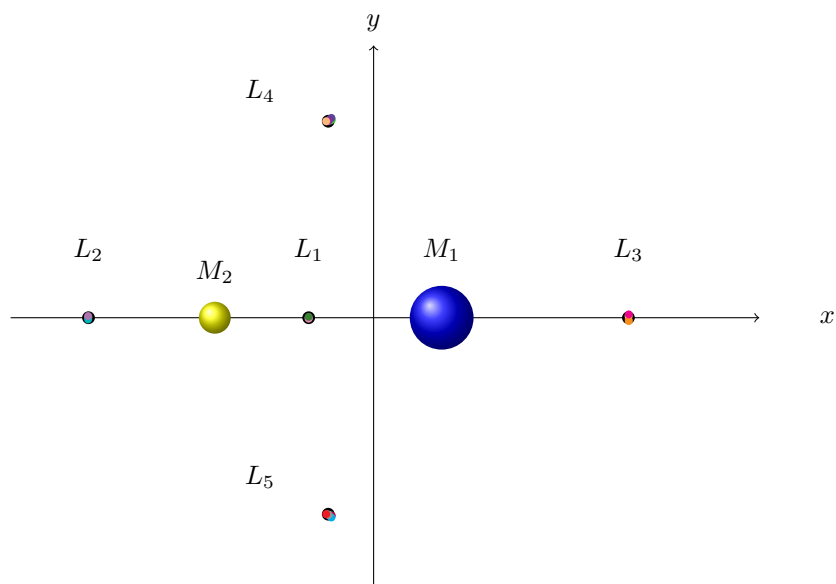


Figura 2.6: Otras soluciones de equilibrio para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

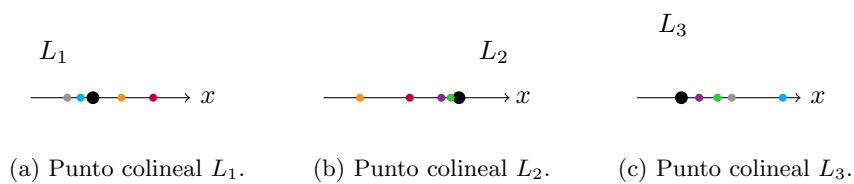


Figura 2.7: Otras soluciones de equilibrio colineales, ampliando alrededor de los puntos de Lagrange, para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

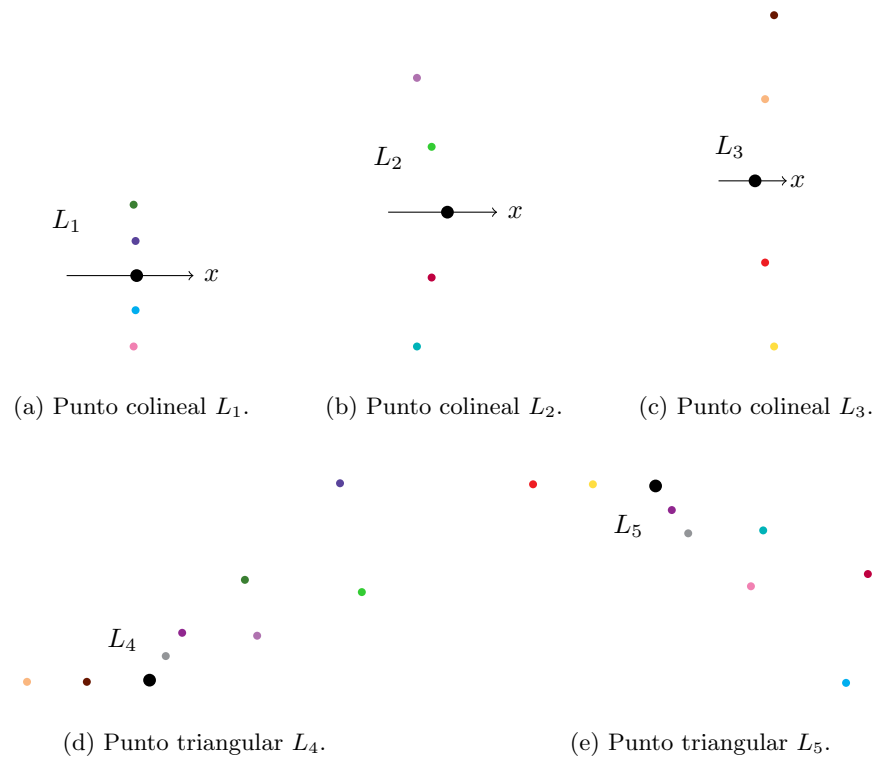


Figura 2.8: Otras soluciones de equilibrio, ampliando alrededor de los puntos de Lagrange, para $\mu = 0.3$, $\mu_1 = 0.02$ y $\mu_2 = 0.01$.

Aquí nos limitaremos a estudiar una condición necesaria para la estabilidad de Lyapunov, que es la estabilidad espectral.

Definición 2. Decimos que una solución de equilibrio x^* del sistema de ecuaciones diferenciales $x' = f(x)$ es espectralmente estable si todos los valores propios de la matriz jacobiana $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*)$ tienen parte real menor o igual que cero.

Este tipo de estabilidad es algo más débil que la estabilidad lineal, que se da cuando el sistema lineal asociado,

$$x' = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)x, \quad (2.42)$$

es estable en el sentido de Lyapunov. Aquí debemos exigir que la parte correspondiente a los valores propios con parte real igual a 0 sea diagonalizable, cosa que no se necesita para tener estabilidad espectral o estabilidad de Lyapunov, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. El punto de equilibrio $(0, 0)$ es estable espectralmente y en el sentido de Lyapunov para el sistema

$$x' = -y, \quad y' = x^3, \quad (2.43)$$

pero es linealmente inestable.

El sistema lineal asociado es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Es evidente que los dos valores propios de la matriz del sistema son iguales a 0, por lo que hay estabilidad espectral. Como la matriz no es diagonalizable, no hay estabilidad lineal. De hecho, la solución del sistema lineal viene dada por

$$x(t) = -y_0 t + x_0, \quad y(t) = y_0, \quad (2.45)$$

siendo x_0, y_0 las condiciones iniciales en $t = 0$. De aquí se sigue la inestabilidad del origen. Por otra parte, las soluciones del sistema no lineal verifican

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x^3} \Rightarrow x^4 + 2y^2 = C, \quad (2.46)$$

con $C \in \mathbb{R}$ y, por tanto, el origen es estable en el sentido de Lyapunov.

Así, para estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio, calculadas en las secciones 2.1 y 2.2, transformaremos el sistema diferencial de segundo orden (2.2) en otro de primer orden de la manera usual. En este sentido, tomaremos como variables

$$\bar{x}^T = (x_1, y_1, x_2, y_2, x'_1, y'_1, x'_2, y'_2), \quad (2.47)$$

de manera que el sistema lineal asociado queda de la forma

$$\bar{x}' = A(\bar{x}^\circ)\bar{x}, \quad (2.48)$$

donde \bar{x}° denota una de las 14 soluciones de equilibrio y $A(\bar{x}^\circ)$ la matriz jacobiana. Recordando la estructura del sistema diferencial (2.2)

$$\begin{aligned} x_1'' &= \mu_1^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + 2y_1', \\ y_1'' &= \mu_1^{-1} \frac{\partial U}{\partial y_1} - 2x_1', \\ x_2'' &= \mu_2^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_2} + 2y_2', \\ y_2'' &= \mu_2^{-1} \frac{\partial U}{\partial y_2} - 2x_2', \end{aligned} \quad (2.49)$$

deducimos que

$$A(\bar{x}^\circ) = \begin{pmatrix} O & I \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

donde O es la matriz nula 4×4 , I la matriz identidad 4×4 y

$$B = M \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2} = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2^{-1} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}^2}, \quad (2.51)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la ecuación característica asociada a la matriz $A(\bar{x}^\circ)$

$$|A(\bar{x}^\circ) - \lambda I| = |B + \lambda C - \lambda^2 I| = 0. \quad (2.52)$$

La estructura del sistema de ecuaciones diferenciales hace que la ecuación (2.52) solo contenga potencias pares de λ , con lo que para que exista estabilidad espectral todas las raíces tienen que tener parte real igual a 0. A pesar de que esto suponga una simplificación del problema, es conveniente manipular (2.52) para poder obtener conclusiones sobre la estabilidad de los equilibrios. Así, a partir de la ecuación (2.8) podemos escribir el potencial U como

$$U = \mu_1 \Omega(x_1, y_1) + \mu_2 \Omega(x_2, y_2) + \frac{\mu_1 \mu_2}{r}, \quad (2.53)$$

y entonces,

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial^2 \Omega(x_1, y_1)}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \Omega(x_2, y_2)}{\partial \bar{x}_2^2} + \mu_1 \mu_2 M \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}_1^2} & -\mu_2 D \\ -\mu_1 D & \mu_2^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}_2^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde $\bar{x}_i^T = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ y

$$D = \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 & 3(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \\ 3(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) & -(x_1 - x_2)^2 + 2(y_1 - y_2)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Si escribimos las matrices λC y $\lambda^2 I$ que aparecen en la ecuación (2.52) como

$$\lambda C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

donde,

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda \\ -2\lambda & 0 \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

entonces la ecuación característica (2.52) puede escribirse como

$$\begin{aligned} &\left| \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}_1^2} & -\mu_2 D \\ -\mu_1 D & \mu_2^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}_2^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} \Lambda_1 & -\mu_2 D \\ -\mu_1 D & \Lambda_2 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

siendo

$$\Lambda_i = \mu_i^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}_i^2} + \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda \\ -2\lambda & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Como $|D| = -\frac{2}{r^6} \neq 0$, entonces la ecuación (2.58) puede reescribirse como

$$\begin{vmatrix} \Lambda_1 & -\mu_2 D \\ 1 & -\Lambda_2 (\mu_1 D)^{-1} \end{vmatrix} = \mu_1^{-1} |\Lambda_1 \Lambda_2 D^{-1} - \mu_1 \mu_2 D| = 0. \quad (2.60)$$

En general, el término $\mu_1 \mu_2 D$ es muy pequeño, por lo que podemos despreciarlo en la ecuación (2.60). De este modo se tiene

$$|\Lambda_1| |\Lambda_2| |D^{-1}| = 0. \quad (2.61)$$

Como $|D| \neq 0$, entonces

$$|\Lambda_i| = \left| \mu_i^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{x}_i^2} + \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda \\ -2\lambda & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \right| = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.62)$$

Calculando el determinante de la ecuación (2.62) se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \lambda^2 \left(4 - \mu_i^{-1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} \right) \right) + \\ + (\mu_i^2)^{-1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial y_i} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

para $i = 1, 2$.

Nótese que esta simplificación nos da lugar a dos ecuaciones características separadas, una por cada una de las masas, y que es válida siempre que $\mu_1 \mu_2 D$ sea suficientemente pequeño, cosa que ocurre en el caso de los satélites troyanos.

A continuación, vamos a estudiar la estabilidad de las soluciones de equilibrio colineales y triangulares por separado, estudiando las raíces de la ecuación característica (2.63).

2.4.1. Estabilidad de las soluciones de equilibrio colineales

Puesto que las soluciones colineales del problema restringido de tres cuerpos son inestables, parece lógico que esto mismo suceda con los equilibrios colineales del problema restringido de 2 + 2 cuerpos. De hecho, podemos observar

que, si el término independiente del polinomio característico en (2.63) tiene signo negativo, va a existir un valor propio con parte real positiva. Esto se deduce de la regla de los signos de Descartes [6], ya que, no importa el signo del coeficiente de λ^2 , la secuencia de signos del polinomio característico presenta un cambio de signo y, por tanto, existe una raíz real positiva.

Ahora bien, para las soluciones de equilibrio colineales se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} &= 1 + \frac{2(1-\mu)}{|x_i - \mu|^3} + \frac{2\mu}{|x_i - \mu + 1|^3} + \frac{2\mu_{3-i}}{|x_1 - x_2|^3}, \\ \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} &= 1 - \frac{1-\mu}{|x_i - \mu|^3} - \frac{\mu}{|x_i - \mu + 1|^3} - \frac{\mu_{3-i}}{|x_1 - x_2|^3}, \\ \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial y_i} &= 0,\end{aligned}\tag{2.64}$$

por lo que el signo del término independiente del polinomio característico es igual al signo de

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2}.\tag{2.65}$$

Por otra parte, observamos que $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} > 0$, por lo que si $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} < 0$, para $i = 1$ o $i = 2$, tendremos inestabilidad. Una condición suficiente para que esto ocurra es que

$$\frac{1-\mu}{|x_i - \mu|^3} > 1 \quad \text{o} \quad \frac{\mu}{|x_i - \mu + 1|^3} > 1.\tag{2.66}$$

De aquí se deduce que

$$\mu - 1 - \mu^{1/3} < x_i < \mu + (1 - \mu)^{1/3}.\tag{2.67}$$

Es decir, (2.67) es una condición suficiente para que los puntos colineales sean inestables. Pero esta condición la cumplen los puntos lagrangianos colineales, L_i , del problema restringido de tres cuerpos. Puesto que L_i es, hasta primer orden, el centro de masas de las soluciones de equilibrio colineales del problema restringido de $2 + 2$ cuerpos, entonces una de las dos masas (m_1 o m_2) tendrá que cumplir necesariamente la condición (2.67). Por tanto, las soluciones de equilibrio colineales son inestables para todos los valores de μ , μ_1 y μ_2 .

2.4.2. Estabilidad de las soluciones de equilibrio triangulares

A diferencia de las soluciones colineales, no es fácil estudiar la estabilidad de los equilibrios triangulares a partir de la ecuación (2.63). Es por ello que

vamos a hacer un estudio numérico, viendo en qué condiciones obtenemos soluciones estables, pues sabemos que los puntos L_4 y L_5 del problema restringido de tres cuerpos son estables si el parámetro de masas μ es menor que el valor crítico de Routh [3] que viene dado por

$$\mu_R = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right) \approx 0.038521. \quad (2.68)$$

No obstante, de los dos tipos de soluciones triangulares obtenidas, solo esperamos estabilidad en aquellas que hemos denominado perpendiculares, ya que las otras presentan una configuración equivalente a las soluciones colineales, si consideramos los dos primarios en el centro de masas, y, por tanto, van a ser inestables.

Puesto que el estudio es numérico, no haremos uso de la aproximación proporcionada por las dos ecuaciones características independientes dadas por (2.63), sino que obtendremos directamente los valores propios a partir de la matriz jacobiana (2.50).

Dado que el problema tiene tres parámetros independientes, vamos a reducir su número introduciendo una ligadura entre μ_1 y μ_2 , de manera que su suma sea constante, por lo que el número de parámetros se reduce ahora a dos. Uno de ellos es μ y el otro lo tomamos como

$$\mu' = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (2.69)$$

siguiendo el trabajo de Whipple [8].

Analizaremos dos casos cuando $\mu_1 + \mu_2 = 10^{-15}$. El primero de ellos para las masas infinitesimales iguales y el otro cuando una de ellas es 9 veces mayor que la otra. Esto lo haremos para las soluciones triangulares perpendiculares en un entrono de L_5 ya que, por simetría, el resultado es análogo para L_4 .

En la Tabla 2.3 podemos ver que el cambio de estabilidad, cuando las masas infinitesimales son iguales, se encuentra aproximadamente en $\mu = 0.011942035$. De hecho vemos que, para $\mu = 0.01194203$, hay dos equilibrios para los que el máximo de la parte real de los valores propios es 0, por tanto, no hay valores propios con parte real positiva y hay estabilidad. En cambio, para $\mu = 0.01194204$, al ser el máximo de la parte real distinta de 0 no obtenemos ningún equilibrio estable.

Para el caso en el que μ_2 es 9 veces mayor que μ_1 y, por tanto, μ' se acerca a 1, vemos en la Tabla 2.4 que el cambio de estabilidad se encuentra aproximadamente en $\mu = 0.011942585$. Como se ve, la diferencia entre el caso anterior y este es del orden de 10^{-7} .

μ	x_1	y_1	x_2	y_2	máx(Re(λ))
$\mu = 0.01194203$	-0.488072	-0.866017	-0.488043	-0.866034	0.000000000
	-0.488060	-0.866028	-0.488056	-0.866022	2.491420000
	-0.488056	-0.86602	-0.488060	-0.866028	2.491420000
	-0.488043	-0.866034	-0.488072	-0.866017	0.000000000
$\mu = 0.01194204$	-0.488072	-0.866017	-0.488043	-0.866034	0.000313281
	-0.488060	-0.866028	-0.488056	-0.866022	2.491420000
	-0.488056	-0.86602	-0.488060	-0.866028	2.491420000
	-0.488043	-0.866034	-0.488072	-0.866017	0.000313281

Tabla 2.3: Cambio de estabilidad de las soluciones de equilibrio triangulares próximas a L_5 para $\mu_1 = \mu_2 = 0.5 \cdot 10^{-15}$.

μ	x_1	y_1	x_2	y_2	máx(Re(λ))
$\mu = 0.01194258$	-0.488060	-0.866024	-0.488031	-0.866040	0.000000000
	-0.488058	-0.866026	-0.488054	-0.866020	2.491430000
	-0.488057	-0.866025	-0.488061	-0.866031	2.491410000
	-0.488055	-0.866027	-0.488084	-0.866011	0.003410390
$\mu = 0.01194259$	-0.488072	-0.866017	-0.488031	-0.866040	0.000206851
	-0.488058	-0.866026	-0.488054	-0.866020	2.491430000
	-0.488057	-0.866025	-0.488061	-0.866031	2.491410000
	-0.488055	-0.866027	-0.488084	-0.866011	0.003425800

Tabla 2.4: Cambio de estabilidad de las soluciones de equilibrio triangulares próximas a L_5 para $\mu_1 = 10^{-16}$ y $\mu_2 = 0.9 \cdot 10^{-15}$.

En la Figura 2.9 podemos ver representada la estabilidad de las soluciones triangulares cercanas a L_5 , donde la zona azul representa los valores de μ y μ' para los que hay soluciones estables, y fuera de esa zona todas las soluciones de equilibrio son inestables. Observamos que el límite crítico de estabilidad está en 0.012 y por tanto, bastante por debajo que el del problema restringido de tres cuerpos que está en 0.038, más de tres veces más pequeño.

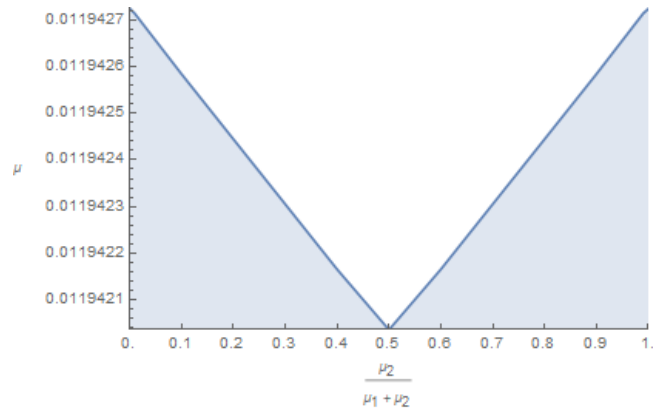


Figura 2.9: Estabilidad de las soluciones de equilibrio triangulares próximas a L_5 .

Capítulo 3

El problema restringido de $2 + N$ cuerpos

Una vez estudiado el problema restringido de $2 + 2$ cuerpos, el siguiente paso sería generalizar lo hecho en el capítulo anterior al caso $2 + N$. Así, el problema restringido de $2 + N$ cuerpos considera el movimiento de N masas infinitesimales que se mueven bajo su interacción gravitacional mutua y la influencia de dos cuerpos primarios, en órbita circular, que no se ven afectados por las N masas infinitesimales.

Sean M_1 y M_2 las masas de los primarios, con $M_2 \leq M_1$ y $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$, y $m_1, m_2, \dots, m_N \ll M_2$ las masas de los cuerpos menores, con $\mu_i = m_i/(M_1 + M_2)$, para $i = 1, \dots, N$. Como en los casos vistos anteriormente, en un sistema de coordenadas rotante y con unidades adecuadas, los primarios se ubican en $(\mu, 0, 0)$ y $(\mu - 1, 0, 0)$ respectivamente, y las coordenadas de los cuerpos menores las denotaremos por (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, N$. Las ecuaciones del movimiento de los N cuerpos menores, análogas a (2.2), vienen dadas por

$$\begin{cases} \mu_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} - 2 \frac{dy_i}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ \mu_i \left(\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2 \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

donde, en este caso,

$$U = \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2) + \frac{1-\mu}{R_{1i}} + \frac{\mu}{R_{2i}} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}}, \quad (3.2)$$

siendo

$$\begin{aligned}
R_{1i}^2 &= (x_i - \mu)^2 + y_i^2 + z_i^2, \\
R_{2i}^2 &= (x_i - \mu + 1)^2 + y_i^2 + z_i^2, \\
r_{ij}^2 &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como sabemos, los puntos de equilibrio del sistema son aquellos puntos que satisfacen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dy_i}{dt} = \frac{dz_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.4}$$

En este caso, las ecuaciones diferenciales se convierten en un sistema de $3N$ ecuaciones no lineales. Como ya hemos visto en los casos más sencillos, el plano $z = 0$ es invariante y no existen soluciones fuera de ese plano. Por tanto, podemos considerar solo el sistema plano, cuando todos los cuerpos se sitúan en el plano xy . Sea $\Omega(x, y)$ la función definida en (2.8), entonces el sistema de ecuaciones que definen las ubicaciones de las soluciones de equilibrio viene dado por

$$\begin{cases} \Omega_x(x_i, y_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} = 0, \\ \Omega_y(x_i, y_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^3} = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \tag{3.5}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Omega_x(x_i, y_i) &= x_i - \frac{(1 - \mu)(x_i - \mu)}{R_{1i}^3} - \frac{\mu(x_i - \mu + 1)}{R_{2i}^3}, \\
\Omega_y(x_i, y_i) &= y_i - \frac{(1 - \mu)y_i}{R_{1i}^3} - \frac{\mu y_i}{R_{2i}^3}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.1. Soluciones de equilibrio colineales

El análisis de las ecuaciones (3.5) no es tan simple como en el caso del problema restringido de $2+2$ cuerpos y obtener soluciones aproximadas mediante desarrollos en serie de Taylor no resultaría una tarea sencilla. No obstante, podemos observar que siguen existiendo soluciones de tipo colineal, que son aquellas situadas sobre el eje $y = 0$. En efecto, de (3.6) se deduce que

$$\Omega_y(x_i, 0) = 0, \tag{3.7}$$

por lo que si $y_i = 0$, para $1 \leq i \leq N$, las ecuaciones (3.5) se simplifican, ya que el segundo bloque es idénticamente cero y el primero solo depende de x_i . Así, las soluciones colineales están determinadas por el siguiente sistema de N ecuaciones

$$\Omega_x(x_i, 0) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.8)$$

Siendo éste un sistema no lineal de N ecuaciones y N incógnitas, encontrar sus soluciones tampoco resulta fácil, por lo que nos conformaremos con determinar el número de soluciones del mismo. Para ello seguiremos las ideas de Moulton para calcular el número de configuraciones centrales colineales del problema general de n cuerpos [2]. La idea es proceder por inducción sobre el número de masas, teniendo en cuenta que, para el caso de una sola masa, que corresponde al problema restringido de tres cuerpos, el número de soluciones es conocido y son las tres correspondientes a los puntos lagrangianos L_i , con $i = 1, 2, 3$. Como veremos, el total de soluciones colineales es igual al total de maneras de ordenar las N masas infinitesimales respecto a las posiciones que ocupan los dos primarios. Si llamamos \mathcal{N} al número total de soluciones, entonces

Teorema 1. *El número de soluciones de equilibrio colineales \mathcal{N} para el problema restringido de $2 + N$ cuerpos viene dado por*

$$\mathcal{N} = \binom{2+N}{2} N! = \frac{1}{2}(2+N)!, \quad (3.9)$$

donde $\binom{2+N}{2}$ es el total de maneras de distribuir las N masas en la línea que ocupan los primarios y $N!$ el total de ordenaciones de las masas infinitesimales.

Nosotros probaremos un resultado parcial, aunque es fácil generalizarlo para obtener el resultado anterior. En concreto, nos centraremos en el caso en que todas las masas estén en la misma posición relativa respecto a los primarios, es decir, todas en un entorno de uno de los puntos colineales L_i , $i = 1, 2, 3$. En este caso tenemos

Teorema 2. *El número de soluciones de equilibrio colineales para el problema restringido de $2 + N$ cuerpos con las N masas infinitesimales en torno a los puntos lagrangianos L_i , $i = 1, 2, 3$, es igual a $3N!$. Es decir, el total de maneras de ordenar las N masas alrededor de L_i .*

Como los N cuerpos menores están ubicados en el mismo lado con respecto a los primarios, supondremos, sin pérdida de generalidad,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_N < \mu - 1. \quad (3.10)$$

Ahora, suponemos que para N cuerpos infinitesimales se cumple que la ecuación (3.8) tiene $N!$ soluciones de equilibrio y comprobamos que para $N + 1$ cuerpos infinitesimales el número de soluciones de equilibrio es $(N + 1)!$. Esto lo haremos en dos pasos. En un primer paso el cuerpo que añadimos va a tener masa 0, es decir, supondremos que $\mu_{N+1} = 0$. Si escribimos el sistema (3.8) para las $N + 1$ masas, tenemos

$$\Omega_x(x_i, 0) - \sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} \mu_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} = 0, \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (3.11)$$

Si separamos la ecuación correspondiente al cuerpo $N + 1$ y el sumando correspondiente en el resto de ecuaciones, las ecuaciones (3.11) se escriben como

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_x(x_i, 0) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} - \mu_{N+1} \frac{x_i - x_{N+1}}{|x_i - x_{N+1}|^3} = 0, \\ \Omega_x(x_{N+1}, 0) - \sum_{j=1}^N \mu_j \frac{x_{N+1} - x_j}{|x_{N+1} - x_j|^3} = 0, \end{array} \right. \quad (3.12)$$

para $i = 1, \dots, N$. Ahora bien, como hemos supuesto que $\mu_{N+1} = 0$, el sistema (3.12) se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_x(x_i, 0) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \\ \Omega_x(x_{N+1}, 0) - \sum_{j=1}^N \mu_j \frac{x_{N+1} - x_j}{|x_{N+1} - x_j|^3} = 0. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Vemos que el primer bloque de ecuaciones corresponde a las soluciones de equilibrio colineales de N masas que, por hipótesis de inducción, se verifican y dan lugar a $N!$ soluciones para x_j , $1 \leq j \leq N$. Una vez resuelto el primer bloque, la última ecuación en (3.13) determina la posición de la masa $N + 1$. Así pues, el número de soluciones de equilibrio para $N + 1$ masas es igual a $N!$ multiplicado por el número de soluciones de la ecuación

$$\phi_{N+1}(x) \equiv \Omega_x(x, 0) - \sum_{j=1}^N \mu_j \frac{x - x_j}{|x - x_j|^3} = 0, \quad (3.14)$$

con $x \in (-\infty, \mu - 1)$ y $x \neq x_j$. La función $\phi_{N+1}(x)$ tiene N puntos de discontinuidad en el intervalo $x \in (-\infty, \mu - 1)$ que lo dividen en $N + 1$ subintervalos donde la función es continua. Lo que vamos a ver es que en cada uno de estos subintervalos existe un único valor de x tal que $\phi_{N+1}(x) = 0$. Para ello, calculamos los límites de $\phi_{N+1}(x)$ en los extremos de dichos subintervalos, es decir en los puntos de discontinuidad, así como en $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_{N+1}(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow x_j^-} \phi_{N+1}(x) &= +\infty, \\
\lim_{x \rightarrow x_j^+} \phi_{N+1}(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow (\mu-1)^-} \phi_{N+1}(x) &= +\infty.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por tanto, la función $\phi_{N+1}(x)$ cambia de signo en cada uno de los $N+1$ subintervalos y, aplicando el Teorema de Bolzano, podemos asegurar la existencia de, al menos, $N+1$ raíces. Por otra parte, vemos que la derivada de $\phi_{N+1}(x)$ es positiva para $x \in (-\infty, \mu-1)$, $x \neq x_j$.

$$\phi'_{N+1}(x) = \Omega_{xx}(x, 0) + 2 \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{|x - x_j|^3} > 0, \tag{3.16}$$

ya que

$$\Omega_{xx}(x, 0) = 1 + \frac{2(1-\mu)}{|x-\mu|^3} + \frac{2\mu}{|x-\mu+1|^3} > 0. \tag{3.17}$$

Por tanto, podemos afirmar que la ecuación (3.14) tiene exactamente $N+1$ soluciones cuando $\mu_{N+1} = 0$ y, en consecuencia, el número de soluciones de equilibrio es igual a $(N+1)!$, probando así lo que dice el enunciado del Teorema 2. Pero μ_{N+1} va a ser mayor que 0, por lo que tenemos que ver que el número de soluciones del sistema (3.12) no cambia cuando $\mu_{N+1} > 0$.

Supongamos que $x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_{N+1}^0 < \mu-1$ es una solución de equilibrio colineal para $\mu_{N+1} = 0$, entonces, al aumentar el valor de μ_{N+1} el total de soluciones puede cambiar en tres casos:

Caso 1: Existen j, k tales que $x_j^0 = x_k^0$ para algunos $1 \leq j \neq k \leq N+1$.

Supongamos que existe $j < k$ tal que $x_j^0 \rightarrow x_k^0$, ambos finitos. Fijémonos en la ecuación j -ésima del sistema (3.11):

$$\begin{aligned}
\Omega_x(x_j^0, 0) - \mu_1 \frac{x_j^0 - x_1^0}{|x_j^0 - x_1^0|^3} - \dots - \mu_k \frac{x_j^0 - x_k^0}{|x_j^0 - x_k^0|^3} - \dots \\
\dots - \mu_{N+1} \frac{x_j^0 - x_{N+1}^0}{|x_j^0 - x_{N+1}^0|^3} = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

donde $\Omega_x(x_j^0, 0)$ es un valor finito mayor que 0. Por la suposición de que $x_j^0 \rightarrow x_k^0$ y, teniendo en cuenta que $j < k$, resulta

$$\mu_k \frac{x_j^0 - x_k^0}{|x_j^0 - x_k^0|^3} \rightarrow -\infty. \tag{3.19}$$

Entonces, tiene que haber un término en la ecuación (3.18) que tiende a $+\infty$ para que ésta se verifique. Por tanto, existe $i < j$ tal que $x_i^0 \rightarrow x_j^0$ y así

$$\mu_i \frac{x_j^0 - x_i^0}{|x_j^0 - x_i^0|^3} \rightarrow +\infty. \quad (3.20)$$

Repitiendo este argumento con x_i , veríamos que existe un índice $\ell < i$ tal que $x_\ell^0 \rightarrow x_i^0$. Pero la secuencia de índices está acotada inferiormente por 1. Por tanto, una vez llegado al primero de los índices, no podríamos continuar el proceso y la primera de las ecuaciones del sistema (3.11) no se verificaría, lo que contradice que tengamos una solución de equilibrio. Así pues, este caso no puede darse.

Caso 2: Existe j , $1 \leq j \leq N+1$, tal que $x_j^0 \rightarrow -\infty$ o $x_j^0 \rightarrow \mu - 1$.

Supongamos que $x_1^0 \rightarrow -\infty$, entonces, de (3.6), se sigue que $\Omega_x(x_1^0, 0) \rightarrow -\infty$. Ahora bien, la primera ecuación del sistema (3.11) viene dada por

$$\Omega_x(x_1^0, 0) - \sum_{j=2}^{N+1} \mu_j \frac{x_1^0 - x_j^0}{|x_1^0 - x_j^0|^3} = 0. \quad (3.21)$$

Para que esta ecuación se cumpla, por un razonamiento similar al del caso anterior, llegamos a que $x_2^0 \rightarrow -\infty$, y repitiendo el argumento obtenemos que $x_j^0 \rightarrow -\infty$ para todo $1 \leq j \leq N+1$. Es decir $\Omega_x(x_j^0, 0) \rightarrow -\infty$ para todo $1 \leq j \leq N+1$. Pero, por otra parte, tras una sencilla manipulación de las ecuaciones (3.11), se tiene que

$$\sum_{j=1}^{N+1} \mu_j \Omega_x(x_j^0, 0) = 0, \quad (3.22)$$

lo que es claramente una contradicción.

Del mismo modo, si suponemos que $x_{N+1}^0 \rightarrow \mu - 1$, entonces $\Omega_x(x_{N+1}^0, 0) \rightarrow -\infty$ y llegaríamos igualmente a una contradicción. Por tanto este segundo caso tampoco puede darse.

Caso 3: El último caso tiene lugar cuando aparece una nueva raíz a través de una raíz múltiple.

Denotemos por ϕ_k a la ecuación k -ésima del sistema (3.11)

$$\phi_k \equiv \Omega_x(x_k, 0) - \sum_{j=1, j \neq k}^{N+1} \mu_j \frac{x_k - x_j}{|x_k - x_j|^3} = 0, \quad (3.23)$$

y supongamos que hay una raíz múltiple. Entonces, el determinante de la matriz jacobiana del sistema (3.11) tiene que ser 0. Es decir,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{N+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{N+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_{N+1}}{\partial x_{N+1}} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.24)$$

Si multiplicamos cada fila por μ_j , respectivamente, y calculamos las derivadas de las funciones ϕ_j , obtenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1(N+1)} \\ \beta_{21} & \alpha_2 & \cdots & \beta_{2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{(N+1)1} & \beta_{(N+1)2} & \cdots & \alpha_{N+1} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.25)$$

donde

$$\alpha_k = \mu_k \left(\Omega_{xx}(x_k, 0) + 2 \sum_{j=1, j \neq k}^{N+1} \frac{\mu_j}{|x_k - x_j|^3} \right), \quad \beta_{k,j} = -\frac{2\mu_k \mu_j}{|x_k - x_j|^3}. \quad (3.26)$$

Nótese que todos los sumandos en α_k son positivos, mientras que cada uno de los $\beta_{j,k}$ son negativos. Es más, podemos escribir

$$\alpha_k = \mu_k \Omega_{xx}(x_k, 0) - \sum_{j=1, j \neq k}^{N+1} \beta_{k,j}. \quad (3.27)$$

Al desarrollar el determinante obtendremos términos positivos y negativos. Cada uno de los términos negativos es el producto de un número impar de elementos $\beta_{k,j}$ y un número par de factores α_k . Pero es fácil comprobar que, cada uno de ellos, se cancela con uno de los términos del producto $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{N+1}$. Puesto que el término

$$\prod_{j=1}^{N+1} \mu_k \Omega_{xx}(x_k, 0) \neq 0, \quad (3.28)$$

no se puede cancelar y es positivo, se deduce que el determinante es distinto de cero. Por tanto, no puede haber raíces múltiples.

En conclusión, hemos visto que al hacer $\mu_{N+1} > 0$ el número de soluciones no cambia. Por tanto, el número de soluciones colineales cerca de los puntos colineales de Lagrange para el problema restringido de $2 + N$ cuerpos es $3N!$, quedando probado el Teorema 2.

Las ideas expuestas en la demostración del Teorema 2 son extrapolables al Teorema 1, con lo que quedaría probado que el número total de soluciones colineales para el problema de $2 + N$ cuerpos es $\frac{1}{2}(2 + N)!$. En realidad este resultado no es sorprendente, ya que cada solución de equilibrio es equivalente a una configuración central de un problema de $2 + N$ cuerpos, de las que sabemos que hay $\frac{1}{2}(2 + N)!$, como ya probó Moulton en 1910 [2]. Si volvemos a la sección 2.3 vemos que tanto el Teorema 1 como el Teorema 2 se cumplen, ya que hemos encontrado 6 soluciones colineales en un entorno de los puntos lagrangianos L_1 , L_2 y L_3 ($3 \cdot 2!$) y un total de 12 soluciones colineales ($\frac{1}{2}(2 + 2)!$).

Conclusiones

Cuando me propusieron este tema me pareció muy interesante ya que relacionaba la astronomía con las matemáticas, dos temas que me gustan. Esto me ha permitido entender mejor cómo se comportan los cuerpos celestes en el espacio. En la memoria se analiza un caso particular, un modelo reducido que pretende dar cuenta de la existencia de satélites coorbitales, como los asteroides troyanos de Júpiter. A pesar de la simplicidad de la formulación del problema, su análisis no resulta tan sencillo.

Las herramientas de cálculo simbólico, junto con técnicas de cálculo numérico, nos han permitido obtener las soluciones de equilibrio para el problema restringido de $2 + 2$ cuerpos. No es tan sencillo como parece encontrar todas las soluciones de equilibrio y no podemos estar seguros de haberlas encontrado todas. Lo que sí es seguro, y hemos probado, es que hemos obtenido todas las soluciones colineales.

Además, hemos estudiado la estabilidad de las soluciones de equilibrio cuando se tienen 2 masas infinitesimales, y hemos concluido que las soluciones colineales y las triangulares en línea son siempre inestables, mientras que las triangulares perpendiculares son estables o inestables dependiendo de los parámetros μ , μ_1 y μ_2 . Según hemos visto, el cambio de estabilidad se produce para valores de μ muy por debajo del límite crítico de Routh para el problema restringido de tres cuerpos. Sin embargo, hemos observado que, a pesar del carácter inestable del punto de equilibrio, las soluciones permanecen en una región acotada alrededor del punto lagrangiano mientras no se rebase el valor crítico de Routh. Este comportamiento parece contrario a la idea intuitiva de inestabilidad y puede tratarse de una inestabilidad débil, asociada a la existencia de toros invariantes que acotan la región de movimiento. Probar esto queda fuera de los objetivos del TFG y queda como una cuestión para abordar en el futuro.

Finalmente, este trabajo me ha servido para aumentar mis conocimientos sobre métodos numéricos, ecuaciones diferenciales y modelización, cuyas herramientas vistas en las asignaturas de la carrera me han sido muy útiles a lo largo de todo el proyecto. Sin embargo, también han surgido distintos problemas, entre los que puedo destacar la aparición del coronavirus, que me ha hecho tener que trabajar desde mi casa sin poder reunirme con mi tutor en persona, lo que

me ayudaba muchas veces a comprender algunos detalles, y que la mayoría de los artículos se encontraban en inglés, lo cual al ser un vocabulario tan técnico a veces me dificultaba su comprensión. Además, quiero destacar que este trabajo es un ejemplo más de las múltiples apariciones del uso de las matemáticas en problemas relacionados con el espacio, como el cálculo de las leyes de Kepler, la fórmula de gravitación universal, etc.

Bibliografía

- [1] BARROW-GREEN, J. *Poincaré and the three body problem*. No. 11. American Mathematical Soc., 1997.
- [2] MOULTON, F. R. The straight line solutions of the problem of n bodies. *The Annals of Mathematics* 12, 1 (1910), 1–17.
- [3] MOULTON, F. R. *An introduction to Celestial Mechanics*. Courier Corporation, 2012.
- [4] PEDRO GÓMEZ-ESTEBAN. El Sistema Solar. Los asteroides troyanos de Júpiter. <https://eltamiz.com/2011/12/21/el-sistema-solar-los-asteroides-troyanos-de-jupiter/>. Accessed: 2019-10-15.
- [5] SLOTINE, J.-J. E., LI, W., ET AL. *Applied nonlinear control*, vol. 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [6] STOER, J., AND BULIRSCH, R. *Introduction to numerical analysis*, vol. 12. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] THE INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION. Planetas menores de Troya. <https://minorplanetcenter.net/iau/lists/Trojans.html>. Accessed: 2019-12-13.
- [8] WHIPPLE, A. L. Equilibrium solutions of the restricted problem of $2 + 2$ bodies. *Celestial Mechanics* 33, 3 (1984), 271–294.
- [9] WHIPPLE, A. L., AND SZEBEHELY, V. The restricted problem of $n + \nu$ bodies. *Celestial Mechanics* 32, 2 (1984), 137–144.